

Открытый конкурс ЮУрГУ по математике

«80 избранных задач по математике»

Четвертый тур

61. Ограничена ли кривая, заданная уравнением

$$x^{2023} + 80x^{1943}y^{80} - 1943xy^{2023} + 80(x+y)^{80} = 2023?$$

62. Неисправный калькулятор вместо сложения выполняет операцию $x \oplus y = x + y + 80$, а вместо умножения – операцию $x \otimes y = x^2 - y^2$. Константы он набирает правильно. Можно ли на этом калькуляторе выполнять операции сложения и умножения?

63. Докажите, что уравнение

$$x^{80} + y^2 - z^2 = 2023$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

64. Шахматный король обошел доску 80×80 и, побывав на каждом поле 1 раз, вернулся последним ходом на исходное поле. Докажите, что он сделал четное число ходов по диагонали.

65. Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки клетчатого квадрата 4×4 ? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньше их быть не может (чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку клетки).

66. Существует ли такой набор из 80 чисел, что ни одно из них не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого делится на каждое из остальных?

67. Последовательность $\{a_n\}$ определяется условиями:

$$a_1 = 20, a_2 = 23, a_{n+2} = a_n - \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Докажите, что найдется член последовательности, равный нулю. Найдите номер этого члена.

68. Для каждого восьмидесятизначного числа (в десятичной системе счисления) считаем произведение его цифр, а затем все эти произведения складываем. Найдите результат.

69. Перемножаются все выражения данного вида при всевозможных комбинациях знаков:

$$\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \dots \pm \sqrt{79} \pm \sqrt{80}.$$

Является ли полученное число а) целым; б) квадратом целого?

70. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c

$$\frac{a\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab} + b} + \frac{b\sqrt{b}}{b + \sqrt{bc} + c} + \frac{c\sqrt{c}}{c + \sqrt{ac} + a} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{3}.$$

71. На доске написаны числа $1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2023}$. Можно стереть любые два числа и записать их разность (неотрицательное число). После ряда таких операций останется одно число. Каким оно может быть?

72. Исследуйте на сходимость ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}} + \dots$$

73. Вычислите интеграл $\int_0^{80} \varphi^{2023}(x) dx$, где $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^x)}$.

74. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, удовлетворяющий условиям:

$$P(80) = 2023, P(2023) = 80, P'(80) = 0?$$

75. Как, используя чашечные весы без гирь, найти из 201 одинаковой на вид монеты фальшивую монету, более легкую, чем настоящие, за не более чем 10 взвешиваний, если каждую монету можно взвешивать не более чем 2 раза?

76. В стае обезьян 80 детёнышей. У любых двух из них есть общий дед. Докажите, что найдется дед, у которого хотя бы 54 внука.

77. Докажите, что в правильном 25-угольнике нет 9-и диагоналей, проходящих через общую внутреннюю точку.

78. Назовем размером прямоугольного параллелепипеда сумму его трёх измерений — длины, ширины и высоты. Можно ли в какой-то прямоугольный параллелепипед поместить другой прямоугольный параллелепипед большего размера?

79. Найдите все функции $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{y'''(x)}{y''(x)} = \frac{y'(x)}{y(x)}.$$

80. Найдите все непрерывные функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ такие, что

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xy < 0, \quad f(x) + f(y) = (x + y)f(x)f(y).$$