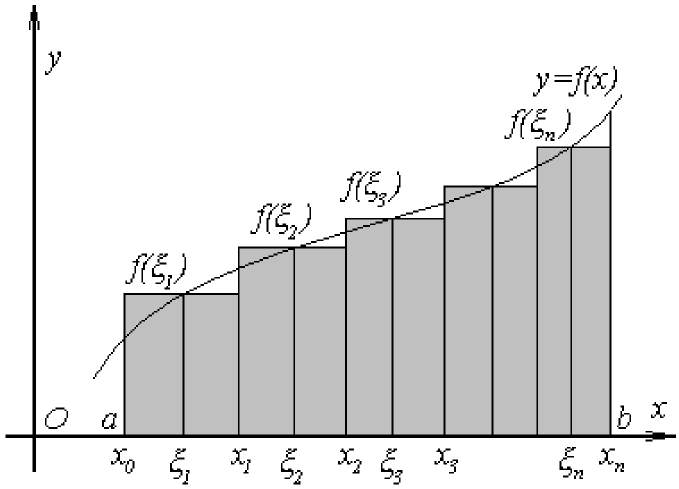
Определение интеграла Римана

Пусть $f(x)$ – интегрируемая функция на отрезке $[a,b]$. Построим разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и выберем в каждом отрезке разбиения выделенную точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $1 \le i \le n$.

Обозначим длину i-го отрезке разбиения $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и введем длину разбиения (параметр λ) как $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$ (см. рисунок).



Тогда интеграл Римана по определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Формула Ньютона–Лейбница и ее следствия

Пусть $f(x)$ – интегрируемая функция на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – ее первообразная, тогда формула Ньютона–Лейбница имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

В случае переменных пределов интегрирования для дифференцируемых функций $a(x)$ и $b(x)$, получим

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\Big(F(b(x)) - F(a(x))\Big) = f\left(b(x)\right)\cdot b'(x) - f\left(a(x)\right)\cdot a'(x).$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right) = f\left(b(x)\right)\cdot b'(x) - f\left(a(x)\right)\cdot a'(x).$$

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad \text{где} \quad a \le c \le b.$

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

3. Пусть $f(x)$ – нечетная функция (т.е. $f(-x) = -f(x)$) или четная функция (т.е. $f(-x) = f(x)$), тогда для определенного интеграла справедливо равенство

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) \ - \ \text{четная функция,} \\ \quad 0, & \text{если } f(x) \ - \ \text{нечетная функция.} \end{cases}$$

4. Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом $T > 0$, тогда

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx.$$